П р и м е р 1. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне её основания, длина которой a. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противоположному ребру.

Р е ш е н и е. Пусть NH — высота данной пирамиды $NABC$ и BCL — сечение плоскостью, перпендикулярной ребру AN (рис. 2). Поскольку пирамида правильная, то H — центр правильного треугольника ABC. Треугольник BCL — равнобедренный. Чтобы найти его высоту KL, достаточно последовательно вычислить длины отрезков AK, AH и AN.

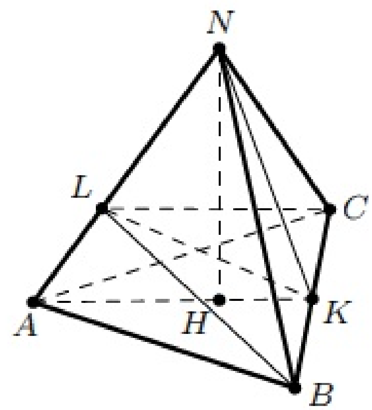

Рис. 2

Треугольник ABC — правильный и $AB = a$, и мы легко находим:

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad AH = \frac{2}{3}AK = \frac{\sqrt{3}}{3}a \quad \text{(радиус описанной окружности).}$$

По теореме Пифагора из треугольника AHN получаем:

$$AN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

Далее, выразив двумя способами площадь треугольника AKN, получим:

$$KL = \frac{AK \cdot NH}{AN}.$$

Подставив найденные значения, найдём: $KL = \dfrac{3}{4}a$. Следовательно, площадь треугольника BCL равна

$$S = \frac{3}{8}a^2.$$

При решении данной задачи мы использовали метод, который называют поэтапно-вычислительным или методом прямого счёта. Он является разновидностью алгебраического метода. При поэтапном решении последовательно вычисляются промежуточные величины, с помощью которых искомые величины связываются с данными.

После того, как задача решена, следует убедиться в правильности решения и попытаться найти более короткий путь, ведущий к решению задачи.

Просматривая предложенное решение, можно заметить, что высоту KL треугольника BCL можно вычислить по-другому. Отрезок KL является катетом прямоугольного треугольника AKL, гипотенуза его $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, угол α наклона бокового ребра AN к плоскости основания можно найти. Таким образом, приходим к такому решению задачи.

Из треугольника AHN находим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{NH}{AH}$, а так как $NH = a$ и $AH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\alpha = 60^\circ$. Из треугольника AKL имеем:

$$KL = AK\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a.$$

Следовательно,

$$S = \frac{3}{8}a^2.$$

Это решение можно ещё немного упростить, если заметить, что треугольник BCL есть ортогональная проекция треугольника ABC на плоскость BCL, и поэтому

$$S = S_{ABC}\cdot\cos\beta,$$

где $\beta = \angle AKL$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BCL и ABC.

Так как $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $\beta = 30^\circ$, то

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cos 30^\circ = \frac{3}{8}a^2.$$

Пример 2. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру. Сторона основания равна a, секущая плоскость делит боковое ребро в отношении $3:2$, считая от вершины пирамиды. Найти боковое ребро и площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Воспользуемся рис. 2 и уже введёнными обозначениями. Из треугольника ABN длину бокового ребра AN прямым счётом найти не удаётся, но можно применить метод составления уравнений, хорошо известный из курса алгебры.

Обозначим $AL = 2x$, $LN = 3x$. Тогда $AN = BN = 5x$.

Боковое ребро AN перпендикулярно плоскости BCL, поэтому оно перпендикулярно прямой BL, значит, треугольники ABL и BLN — прямоугольные. Выразим двумя способами их общий катет BL, пользуясь теоремой Пифагора:

$$BL^2 = a^2 - 4x^2 \quad \text{и} \quad BL^2 = 25x^2 - 9x^2.$$

Получим уравнение:

$$16x^2 = a^2 - 4x^2,$$

откуда $20x^2 = a^2$, $x = \dfrac{\sqrt{5}}{10}a$, а так как $AN = 5x$, то $AN = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

Все другие элементы пирамиды теперь можно найти прямым счётом.

Из треугольника BKN, согласно теореме Пифагора, имеем:

$$KN = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a.$$

Следовательно,

$$S_{\text{бок}} = \frac{3}{2}a^2.$$

Пример 3. Основанием пирамиды служит ромб, две боковые грани которого перпендикулярны плоскости основания. Под каким углом наклонены к плоскости основания две другие грани, если площадь боковой поверхности пирамиды вдвое больше площади его основания?

Решение. Пусть $NABCD$ — данная пирамида, грани ADN и CDN которой перпендикулярны плоскости основания (рис. 3). Поскольку

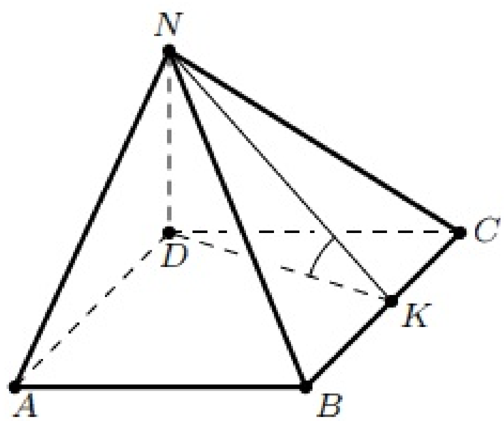

Рис. 3

$ABCD$ — ромб и $AD = CD$, то прямоугольные треугольники ADN и CDN равны, значит, $AN = CN$. Треугольники ABN и BCN также равны (три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого). Проведём $DK \perp BC$, тогда $NK \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах. Следовательно, DKN — линейный угол двугранного угла при ребре BC.

Для нахождения угла DKN составим уравнение. Пусть $\angle DKN = x$. Введём ещё два вспомогательных параметра: $AB = a$ и $DK = h$. Из треугольника DKN имеем:

$$DN = h \cdot \operatorname{tg} x, \quad KN = \frac{h}{\cos x}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды равна $S_{\text{бок}} = 2S_{ADN} + 2S_{BCN}$, или

$$S_{\text{бок}} = AD \cdot DN + BC \cdot KN.$$

Подставив в это равенство значения AD, DN и KN, получим:

$$S_{\text{бок}} = ah\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right).$$

Согласно условию задачи $S_{\text{бок}} = 2S_{\text{осн}}$, но $S_{\text{осн}} = ah$, следовательно,

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = 2.$$

Полученное уравнение, где $0^\circ < x < 90^\circ$ и $\operatorname{tg} x < 2$, можно решить разными способами. Запишем его в виде:

$$2 - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат и воспользуемся формулой $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Получим

$$4 \operatorname{tg} x = 3.$$

Итак, $\angle DKN = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{4}$.