П р и м е р 2. Около сферы радиуса r описан усечённый конус, образующая которого равна l. Найти площадь полной поверхности усечённого конуса.

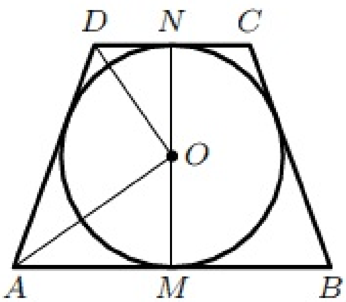

Рис. 12

Р е ш е н и е. Центр сферы одинаково удалён от оснований усечённого конуса и совпадает с серединой O отрезка MN, соединяющего центры оснований. Осевое сечение конуса представляет собой равнобочную трапецию, описанную около окружности (рис. 12).

Введём обозначения: r_1 и r_2 — радиусы оснований усечённого конуса ($r_1 < r_2$), $S_{\text{бок}}$ — площадь его боковой поверхности.

Воспользуемся формулой

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Согласно свойству сторон четырёхугольника, описанного около окружности, имеем:

$$r_1 + r_2 = l.$$

Значит,

$$S_{\text{бок}} = \pi l^2.$$

Треугольники AOM и DON подобны, поэтому

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r}{r_2}, \quad \text{откуда} \quad r_1 r_2 = r^2.$$

Найдём сумму площадей оснований конуса:

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)^2 - 2\pi r_1 r_2 = \pi(l^2 - 2r^2).$$

Таким образом, площадь полной поверхности усечённого конуса

$$S = \pi l^2 + \pi(l^2 - 2r^2).$$

П р и м е р 3. В конус вписан шар, объём которого в два раза меньше объёма конуса. Радиус основания конуса равен R. Найти радиус шара и высоту конуса.

Р е ш е н и е. Обозначим радиус шара и высоту конуса через r и h. Тогда по условию

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{8}{3}\pi r^3,$$

откуда $R^2 h = 8r^3$.

Можно составить ещё одно уравнение, содержащее неизвестные r и h, но проще применить способ введения вспомогательного угла.

Обозначим угол HAN наклона образующей конуса к плоскости основания через 2α, тогда $\angle HAO = \alpha$ (рис. 13). Выразим через R и α радиус OH шара и высоту NH конуса. Из прямоугольных

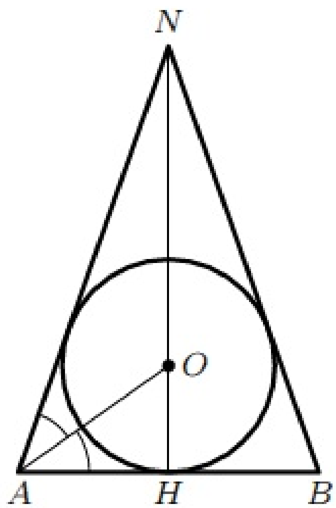

Рис. 13

треугольников AOH и ANH имеем:

$$r = R\operatorname{tg}\alpha, \quad h = R\operatorname{tg}2\alpha.$$

Подставив значения r и h в равенство $R^2h = 8r^3$, получим уравнение:

$$\operatorname{tg}2\alpha = 8\operatorname{tg}^3\alpha, \quad 0^\circ < \alpha < 45^\circ.$$

Так как $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ и $\operatorname{tg}\alpha \neq 1$, то уравнение после упрощений принимает вид:

$$4\operatorname{tg}^4\alpha - 4\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0,$$

или

$$(2\operatorname{tg}^2\alpha - 1)^2 = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Далее находим: $\operatorname{tg}2\alpha = 2\sqrt{2}$, и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}R, \quad h = 2R\sqrt{2}.$$

99. На основании конуса лежат три шара радиуса r, каждый из которых касается двух других и боковой поверхности конуса. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найдите радиус основания конуса.

99. $5r$. Решение. Пусть O_1 — центр одного из трёх шаров, касающихся основания конуса, NH — высота конуса (рис. 44). Плоскость HNO_1 пересекает боковую поверхность конуса по образующей AN. Расстояния от точки O_1 до основания конуса и до образующей AN равны r. Значит, AO_1 — биссектриса угла HAN, равного $60°$. Пусть B — точка касания шара с основанием конуса, тогда $\angle BAO_1 = 30°$, $O_1B = r$ и $AB = r\sqrt{3}$.

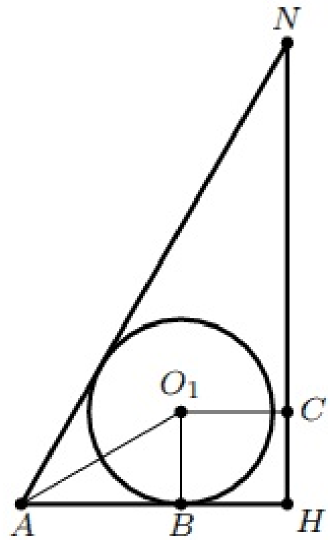

Рис. 44

Так как центры O_1, O_2, O_3 касающихся шаров являются вершинами равностороннего треугольника и $O_1O_2 = 2r$, то расстояние O_1C от вершины O_1 до центра этого треугольника, лежащего на высоте конуса, равно $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Итак, $AH = AB + BH = AB + O_1C = r\sqrt{3} + \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{5r\sqrt{3}}{3}$. Из треугольника AHN имеем: $NH = AH \operatorname{tg} 60° = 5r$.