П р и м е р 3. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм. Проведена плоскость, пересекающая боковые рёбра SA, SB, SC, SD пирамиды соответственно в точках K, L, M, N таких, что $SK=\dfrac{1}{k}SA$, $SL=\dfrac{1}{l}SB$, $SM=\dfrac{1}{m}SC$, $SN=\dfrac{1}{n}SD$. Найти зависимость между числами k, l, m и n.

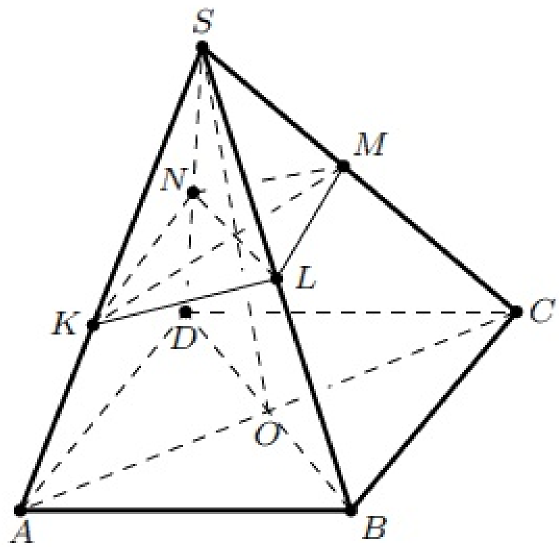

Рис. 17

Р е ш е н и е. Согласно условию принадлежности четырёх точек K, L, M и N одной плоскости имеем:

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MK}+\beta\overrightarrow{ML}.$$

Представим каждый из векторов, входящих в это равенство, в виде разности двух векторов с общим началом в точке S (рис. 17). Получим:

$$\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SM}=\alpha(\overrightarrow{SK}-\overrightarrow{SM})+\beta(\overrightarrow{SL}-\overrightarrow{SM}).$$

Отсюда
$$\overrightarrow{SN} = \alpha\overrightarrow{SK} + \beta\overrightarrow{SL} + \gamma\overrightarrow{SM},$$
где $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

Учитывая условие задачи, предыдущее равенство перепишем так
$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{\alpha}{k}\overrightarrow{SA} + \frac{\beta}{l}\overrightarrow{SB} + \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{SC}.$$

Обозначим через O точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Так как O — середина диагоналей AC и BD, то
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}.$$

Значит,
$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

Таким образом, вектор $\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$ выражен двумя способами через некомпланарные векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

В силу единственности разложения вектора получаем числовые равенства:
$$\frac{\alpha}{k} = \frac{1}{n}, \quad \frac{\beta}{l} = -\frac{1}{n}, \quad \frac{\gamma}{m} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$, находим:
$$\frac{k}{n} - \frac{l}{n} + \frac{m}{n} = 1,$$
или
$$k + m = l + n.$$

П р и м е р 6. Боковые грани правильной шестиугольной призмы — квадраты. Найти величину угла между скрещивающимися диагоналями смежных граней призмы.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма (рис. 18). Требуется найти угол между прямыми AB_1 и BC_1. Разложим векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ по некомпланарным векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$. Получим:

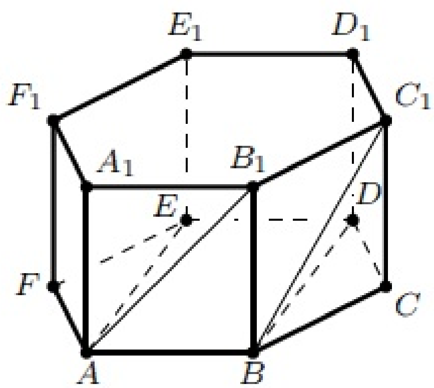

Рис. 18

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}.$$

Длина векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ одинаковы, примем их за 1, тогда $AB_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\vec{a} + \vec{c})(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Пусть φ — угол между прямыми AB_1 и BC_1, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{AB_1 \cdot BC_1} = \frac{3}{4}.$$

Итак, $\varphi = \arccos\dfrac{3}{4}$.

Векторные решения часто значительнее проще и эффективнее решений, полученных элементарными средствами, и отличаются большей общностью.